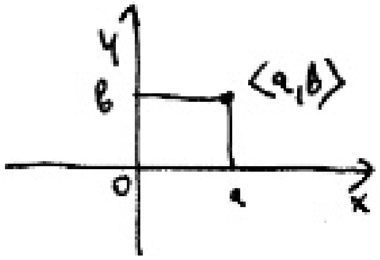
Funkcje wielu zmiennych (najpierw dwóch zmiennych)

Definicja 1 Funkcją rzeczywistą dwóch zmiennych nazywamy funkcję przekształcającą zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (czyli $\mathbb{R}^2$) w zbiór $\mathbb{R}$.

Mamy więc $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{< a, b > ; a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$.
Geometrycznie zbiorowi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ odpowiada cała płaszczyzna rzeczywista.



Zatem funkcja dwóch zmiennych przyporządkowuje każdej parze liczb rzeczywistych jakąś liczbę rzeczywistą. Para ta musi należeć jednak do dziedziny funkcji.

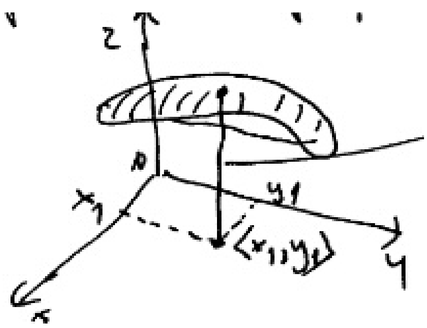
Dla funkcji dwóch zmiennych dziedzina funkcji jest podzbiorem $\mathbb{R}^2$ czyli $D_f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Przykład 1
$f(x, y) = x^2 + y^2$
Mamy $f(0, 0) = 0$; $f(1, 1) = 2$; $f(-1, -2) = 5$
Łatwo zauważyć, że $f(x, y) = x^2 + y^2$ przyjmuje tylko wartości nieujemne, czyli, że $f(x, y) \geqslant 0$.

Przykład 2
$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Dziedziną funkcji jest zbiór $D_f = \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$

Przykład 3
$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Aby okreslić dziedzinę musimy zarządać by $4 - x^2 - y^2 \geqslant 0$. Stąd $x^2 + y^2 \leqslant 4$.
Ponieważ równanie $x^2 + y^2 = 4$ jest równaniem okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 2, więc dziedziną funkcji jest koło o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 2.

Funkcja dwóch zmiennych jest (geometrycznie) powierzchnią w przestrzeni trójwymiarowej.



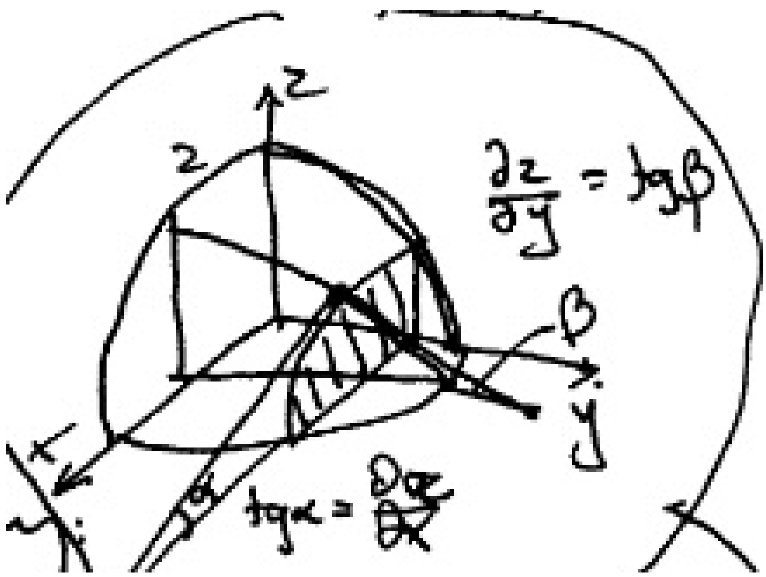
Linia pionowa na wykresie od punktu (x, y) do punktu na powierzchni jest wartością funkcji w punkcie (x, y)

Pochodne cząstkowe funkcji dwóch zmiennych

Dla funkcji jednej zmiennej mieliśmy:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Dla funkcji dwóch zmiennych obliczamy pochodne cząstkowe traktując jedną ze zmiennych jako stałą. Geometrycznie oznacza to obliczanie pochodnej wzdłuż płaszczyzn tnących równoległych do płaszczyzn XZ i YZ układu współrzędnych.



Formalnie zapisujemy to jako:

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y}$$

Stosuje się też oznaczenia podobne do $\frac{dx}{dy}$. Używana jest litera podobna do greckiego δ

Czyli $f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ oraz $f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$

Piszemy także $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$

Przykłady obliczania pochodnych cząstkowych

Zawsze jest to obliczanie pochodnej funkcji jednej zmiennej bo drugą zmienną traktujemy jako stałą.

Przykład 4

$z = 2x + 3y + 10$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 + 0 + 0 = 2; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 3 + 0 = 3$$

Przykład 5
$z = x^2 + y^2 + xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0 + y = 2x + y; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2y + x = x + 2y$$

Przykład 6
$z = x^2 + \frac{1}{y} + e^y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0 + 0 = 2x; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 - \frac{1}{y^2} + e^y = e^y - \frac{1}{y^2}$$

Przykład 7
$z = x^2y^3 + \ln x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + \frac{1}{x}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + 0 = 3x^2y^2$$

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu obliczamy tak jak pochodne drugiego rzędu funkcji jednej zmiennej. Obliczamy po prosyu pochodną z pochodnej funkcji. W przypadku pochodnych cząstkowych dla funkcji dwóch zmiennych mamy jedna dodatkowo pochodne cząstkowe mieszane.

Dla funkcji $z = f(x, y)$ pochodne cząstkowe drugiego rzędu są następujące:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

Przykład 8 Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu.
$z = x^2 + 2y^2 + 10x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 10; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(4y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 10) = 0$$

Pytanie:
Czy $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Na to pytanie udzielił odpowiedzi Schwartz w swoim twierdzeniu:

Jeżeli $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ oraz $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ są obie ciągłw w punkcie (x_0, y_0), to $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}$.

Przykład 9 Obliczyć pochodne cząstkowe I i II rzędu dla funkcji: $f(x, y) = x^2 + xy^2 + x^2y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2 + 2xy; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^2$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + 2y; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y + 2x; \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y + 2x$

Pochodne mieszane są sobie równe na podstawie twierdzenia Schwartza.

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Dana jest funkcja $z = f(x, y)$. Aby wyznaczyć punkty z jej dziedziny, dla których mogą się realizować ekstrema trzeba rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy punkty $(x_1, y_1)\ldots$

Aby rozstrzygnąć jakiego rodzaju są ekstrema w wyznaczonych punktach obliczamy wyznacznik Δ z macierzy:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Jeżeli, w którymś z punktów mamy:
a) $\Delta > 0$, to ekstremum istnieje i jest to:

-maksimum, gdy $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$

-minimum, gdy $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$

b) $\Delta < 0$, to brak ekstremum
c) $\Delta = 0$, to potrzebna jest bardziej szczegółowa analiza.

Przykład 9 Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 1$

Obliczamy $\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$

Wnioskujemy z tego, że ekstrema istnieją. Obliczając pochodne do układu równań otrzymujemy $2(x-1)$ oraz $2(y-2)$.Mamy stąd punkt $(1, 2)$ podejrzany o to, że w nim realizuje się ekstremum.

Widzimy z wyznacznika powyżej, że $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$. Zatem w punkcie $(1, 2)$ realizuje się minimum.

Zadanie Wyznaczyć ekstrema funkcji $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
Obliczamy pochodne cząstkowe i tworzymy układ równań:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 2 = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1 = 0$$

stąd otrzymujemy punkt $(1,0)$ podejrzany o to, że w nim realizuje się ekstremum.

Obliczamy pochodne drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\ ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

Zatem $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$ więc ekstremum istnieje.

Ponieważ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$ więc w punkcie $(1,0)$ realizuje się minimum.